ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: Thứ Bảy 04/01/2020
Thời gian làm bài: 120 phút (*không kể phát đề*)
NĂM HỌC: 2019-2020

Bài 1. (*1,5 điểm*)

Cho a, b, c là ba số khác nhau đôi một. Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$$

Bài 2. (*1,5 điểm*)

Giải phương trình : $\sqrt{x+1}=x^2-6x+5$

Bài 3. (*2 điểm*)

a) Cho $x, y \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4 \geq 0$

b) Cho $a,\ b$ là hai số dương thỏa điều kiện $a+b \leq 1$. Chứng minh:

$$3b^2+\frac{5b}{4a}+2 \geq 8b$$

Bài 4. (*4 điểm*)

Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 8$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm D, E, F.

a) Tính độ dài đoạn AD.

b) Gọi M là giao điểm của DE và đường thẳng qua A song song với BC; N là giao điểm của hai đường thẳng MF và BC. Chứng minh rằng C là trung điểm của EN.

c) Gọi P là giao điểm của DE và BF. Tính tỉ số $\frac{PE}{PM}$.

Bài 5. (1 *điểm*)

Hãy biểu diễn số 2019 thành tổng của các số tự nhiên liên tiếp.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. *(1,5 điểm)*

Cho a, b, c là ba số khác nhau đôi một. Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$$ (a,b,c là ba số khác nhau đôi một)

Giải

$$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}\right)$$ 0,5đ

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+2\left(\frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right)$$ 0,5đ

$$=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$ 0,5đ

Bài 2. *(1,5 điểm)*

Giải phương trình : $\sqrt{x+1}=x^2-6x+5$

Giải

$$\sqrt{x+1}=x^2-6x+5 \Leftrightarrow x+1+\sqrt{x+1}+\frac{1}{4}=x^2-5x+\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+\frac{1}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}\\ \sqrt{x+1}+\frac{1}{2}=-x+\frac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=x-3\\ \sqrt{x+1}=-x+2\end{array}\right.$$ (0,5đ)

* $\sqrt{x+1}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ x^2-7x+8=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ (0,5đ)

* $\sqrt{x+1}=-x+2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ x^2-5x+3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ (0,5đ)

Bài 3. *(2 điểm)*

a) Cho $x, y \neq 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+4\ge 0$

Giải

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)$$ (0,5đ)

$$= \frac{x^2 + y^2 - xy}{xy} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{\left[x^2 + y^2 + (x-y)^2\right](x-y)^2}{2x^2y^2} \ge 0, \forall x, y \ne 0 \qquad (0{,}5đ)$$

b) Cho $a,\ b$ là hai số dương thỏa điều kiện $a + b \le 1$. Chứng minh: $3b^2 + \frac{5b}{4a} + 2 \ge 8b$

Giải.

$$3b^2 + \frac{5b}{4a} + 2 \ge 8b \Leftrightarrow 3b + \frac{5}{4a} + \frac{2}{b} \ge 8 \qquad (0{,}25đ)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{5}{4a} + 5a \ge 2\sqrt{\frac{5}{4a}.5a} = 5 \qquad (0{,}25đ)$$

$$\frac{2}{b} + 8b \ge 2\sqrt{\frac{2}{b}.8b} = 8 \qquad (0{,}25đ)$$

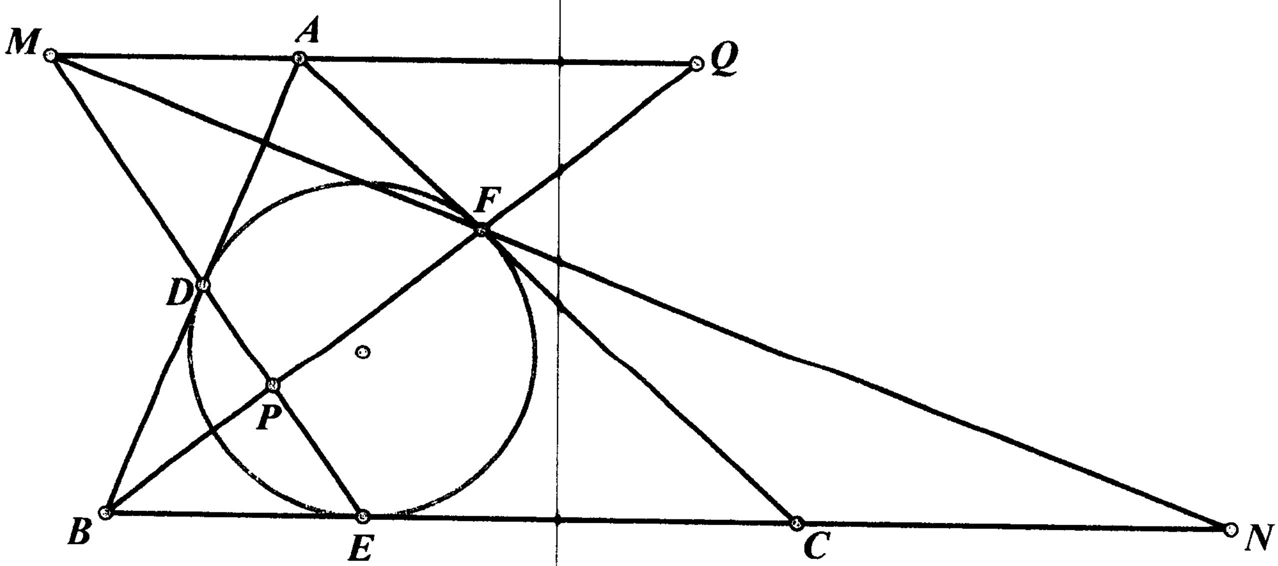
$$-5(a+b) \ge -5$$

Cộng ba bất đẳng thức lại, ta có điều phải chứng minh. (0,25đ)

Bài 4. (*4 điểm*)

Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 8$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm D, E, F.

Giải



a/ Tính độ dài đoạn AD.

Chứng minh $AD = AF = \frac{AB + AC - BC}{2} = 2$ (1đ)

b/ Chứng minh rằng C là trung điểm của EN.

Ta có : $\Delta ADM \sim \Delta BDE \Rightarrow AD = AM \Rightarrow AM = AF$ (0,75đ)

$\Delta AMF \sim \Delta CNF \Rightarrow CF = CN \Rightarrow CE = CN \Rightarrow$ đpcm (0,75đ) c/ Gọi P là giao điểm của DE và BF. Tính tỉ số $\frac{PE}{PM}$.

$AD = 2 \Rightarrow BD = BE = 3$ và $CF = CE = 5$ (0,25đ)

Gọi Q là giao điểm của BF và AM.

$\Delta AQF \sim \Delta CBF \Rightarrow \frac{AQ}{CB} = \frac{AF}{CF} \Rightarrow AQ = \frac{16}{5} \Rightarrow MQ = \frac{26}{5}$ (1đ)

Ta có: $\frac{PE}{PM} = \frac{BE}{MQ} = \frac{15}{26}$ (0,25đ)

Bài 5. (1 *điểm*)

Hãy biểu diễn số 2019 thành tổng của các số tự nhiên liên tiếp.

Giải.

Gọi n số có tổng bằng 2019 là: $k+1, k+2, \ldots, k+n$. ($n \geqslant 2$)

$\Rightarrow (k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n) = 2019$

$\Rightarrow nk + 1 + 2 + \ldots + n = 2019$ (0,25đ)

$\Rightarrow nk + \frac{n(n+1)}{2} = 2019$ (0,25đ)

$\Rightarrow n(2k+n+1) = 2.3.673$

$\Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ 2k+n+1 = 3.673 \end{cases} \vee \begin{cases} n = 3 \\ 2k+n+1 = 2.673 \end{cases} \vee \begin{cases} n = 6 \\ 2k+n+1 = 673 \end{cases}$ (0,25đ)

$\Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ k = 1008 \end{cases} \vee \begin{cases} n = 3 \\ k = 671 \end{cases} \vee \begin{cases} n = 6 \\ k = 333 \end{cases}$ (0,25đ)